

Ա.Ի.Ալիխանյանի անվան ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Վստիանիայան Վահան Վյաչեսլավի

Բազմամասնիկային փոխազդեցություններով Իզինգի և Փոթսի մոդելների կրիտիկական վարքը և մագնիսական հարկությունները ռեկորդներ ցանցերի վրա

Ա.04.02 - "Տեսական ֆիզիկա" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական ասպիրանտի հայցման արձեմախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2009

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.И. Алиханяна

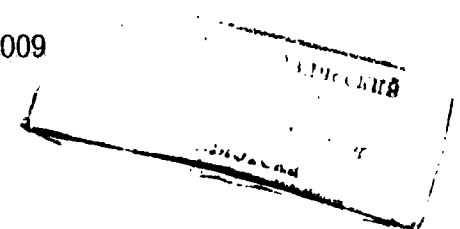
Оганнисян Ваган Вячеславович

Критическое поведение и магнитные свойства моделей Изинга и Поттса с многочастичными взаимодействиями на рекуррентных решетках

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 - "Теоретическая физика"

Ереван 2009



Необычные свойства ³He позволяют применять для описания его термодинамики на лестницах. Экспериментально установлено, что первый и второй слои твердого ³He имеют треугольную решеточную структуру, а третий слой в некоторых случаях можно рассматривать как жидкость на решетке кагоме [10, 11]. Известно, что в таких системах преобладает связь между более чем двумя спинами, и имеет место переход системы от ферромагнитного к антиферромагнитному состоянию [12].

Настоящая диссертация посвящена изучению некоторых физических свойств моделей Изинга [13] и Поттса [14] с многочастичным взаимодействием на рекуррентных решетках. Используя динамический метод для модели Изинга с двух- и трех-частичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице во внешнем магнитном поле, мы исследовали намагниченность системы. Показано, что во внешнем магнитном поле на кривой намагниченности появляются магнитные плато в точках $m = 0$ и $m = 1/3$ при определенных значениях параметров. Те же самые результаты мы получили применяя трансфер-матричный метод. Рассмотрен также ляпуновский показатель на зигзагообразной лестнице. Показано, что в антиферромагнитных моделях на плато намагниченности существует некоторое значение магнитного поля, для которого максимальный ляпуновский показатель приближается к нулю.

В настоящей работе изучаются также нули статистической суммы для анизотропной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями (ANNNI модель). Начиная с открытия статистической основной целью было понять, как статистическая сумма для системы конечного размера приобретает особенность в термодинамическом пределе, когда система подвергается фазовому переходу. В 1952 году Янг и Ли предложили новый метод для изучения фазового перехода системы изучая нули статистической суммы [15, 16]. Они рассмотрели статистическую сумму ферромагнитной модели Изинга в области комплексных значений магнитного поля (активности $\exp(-h/kT)$, где k постоянная Больцмана, T температура и h магнитное поле). Было доказано, что нули статистической суммы модели Изинга распределены по единичной окружности с центром в нуле на комплексной плоскости активности и что фазовый переход в системе происходит в случае, когда непрерывное распределение нулей статистической суммы пересекает реальную ось в термодинамическом пределе. С этого времени, много работ было посвящено исследованию термодинамических свойств различных моделей при использовании распределения нулей статистической суммы (для обзора, см. [17]). Впоследствии Фишер исследовал нули статистической

суммы модели Изинга на квадратной решетке в области комплексных значений температуры (нули Фишера [18]). Было показано, что в этом случае в термодинамическом пределе нули статистической суммы распределены на двух кругах, где один из кругов соответствует ферромагнитной, а другой антиферромагнитной модели Изинга. Таким образом, используя распределение нулей Фишера в комплексной температурной области ферромагнитные и антиферромагнитные фазы системы могут быть изучены одновременно. Один из наиболее используемых методов для изучения нулей статистической суммы для одно- и двумерных систем является трансфер-матричный метод [19, 20]. Ванг и Ким аналитически доказали, что в реальном магнитном поле наибольшее собственное значение трансфер-матрицы должны быть дважды вырожденными в точке фазового перехода [21].

Другим предметом наших исследований являются магнитные свойства и хаотическое поведение антиферромагнитной модели Поттса на решетке Бете и модели Изинга на решетке Хусими. Хаос - своего рода уникальное детерминированное нелинейное динамическое поведение, которое может наблюдаться во многих физических процессах. Теория хаоса описывает поведение определенных динамических систем, развиваясь во времени. Работы над хаотическими и стохастическими моделями, которые включают взаимодействия, помогли в понимании модулированных фаз и хаотических свойств спиновых и колибровачных моделей. В нашей диссертации показано существование бифуркационных точек, периода удвоение и хаоса для вышеупомянутых моделей.

Целью диссертационной работы является исследование критического поведения и магнитных свойств моделей Изинга и Поттса на рекуррентных решетках с многочастичными взаимодействиями, а именно:

1. Используя метод динамических систем, исследовать магнитные свойства модели Изинга с двух- и трех-частичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице. Теоретически доказать существование плато на кривой намагниченности от внешнего магнитного поля при низких температурах. А также исследовать ляпуновский показатель на плато намагниченности.
2. Используя метод трансфер-матриц исследовать модель Изинга с двух- и трех-частичными взаимодействиями на зигзаг лестнице и показать, что результаты совпадают с результатами полученными

методом динамического подхода. Также исследовать физические свойства магнитной восприимчивости.

3. Исследовать комплексные нули статистической суммы для анизотропной модели Изинга со спином $1/2$ с многочастичными взаимодействиями, а именно, нули Янга-Ли в области комплексных магнитных полей и нули Фишера в области комплексных температур. Вычислить индексы граничной сингулярности.
4. Исследовать хаотическое поведение намагниченности для модели Поттса на решетке Бете, модели Изинга с мультиспиновым взаимодействием на решетке Хусими и модели Изинга на шестиугольной решетке. Также исследовать ляпуновский показатель и языки Арнольда для этих моделей. Показать, что модель Изинга с двух- и трех-частичными взаимодействиями на шестиугольной решетке, имеет фазовый переход второго рода и наблюдается плато намагниченности при $m = 0$.

Научная новизна.

Используя динамический метод рекуррентных отображений, получены многомерные рациональные соотношения для статистической суммы для модели Изинга на зигзагообразной лестнице. При помощи этих отображений, были получены плато намагниченности. Вычислен ляпуновский показатель для трехмерного отображения при низких температурах.

Впервые исследованы комплексные нули статистической суммы для анизотропной модели Изинга со спином $1/2$ с многочастичными взаимодействиями. Показано, что эта модель не имеет фазовый переход, т.е. нули статистической суммы не пересекают реальную ось.

Используя динамический метод рекуррентных отображений для модели Поттса на решетке Бете, модели Изинга на решетке Хусими и модели Изинга на шестиугольной решетке построены графики зависимости намагниченности от внешнего магнитного поля. Бифуркационные точки, период удвоения и хаос наблюдаются на кривой намагничивания. Также исследован ляпуновский показатель и языки Арнольда.

Практическая и теоретическая ценность.

Показано, что динамический метод рекуррентных отображений позволяет исследовать критическое поведение многих физических систем,

таких как твердый ^3He , материалы содержащие купрат Cu и др. Полученные результаты могут быть использованы в экспериментальных исследованиях плат намагниченности проводимых в SPEC (Saclay, France), Institut Neel (Grenoble, France), AT&T Bell Laboratories (New Jersey, U.S.A.), Stanford University (California, U.S.A.), University of Insubria (Italy).

Основные положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие результаты по исследованию спиновых явлений и критических свойств в статистической физики:

1. Для модели Изинга на зигзагообразной лестнице, используя метод динамических систем, получены трехмерные рекуррентные отображения для статистической суммы [1]. Построены кривые намагниченности для модели Изинга на зигзагообразной лестнице. Показано, что при низких температурах имеются плато намагниченности при значениях $m = 0$ и $m = 1/3$. Вычислена зависимость ляпуновского показателя от внешнего магнитного поля и показано, что максимальный ляпуновский показатель приближается к нулю. [3].
2. Методом трансфер-матриц исследованы магнитные свойства модели Изинга на зигзагообразной лестнице. Построены графики намагниченности и показано, что результаты совпадают с результатами полученными с помощью динамического отображения [2].
3. Для анизотропной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями (ANNNI) получены нули статистической суммы (нули Янга-Ли и Фишера). Изучены точки граничной сингулярности для этих нулей. Найдены соответствующие индексы граничной сингулярности [4].
4. Для двух типов рекурсивных решеток Бете и Хусими получены одномерные рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы и намагниченности. Продемонстрировано существование бифуркаций, удвоений и хаоса при определенных значениях констант взаимодействия и температуры. Построена зависимость ляпуновского показателя от внешнего магнитного поля. Построены графики первого и второго бифуркационных линий (языки Арнольда) [3]. В качестве приближения зигзагообразной лестницы рассмотрена модель Изинга на шестиугольной решетке.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались диссертантом на международной конференции "XXVII Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics" (Yerevan, Armenia 2008), а также на семинаре в Ереванском Физическом Институте.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 4 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работаложена на 95 страницах, состоит из введения, 4 глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 129 наименований.

Содержание работы

Во введении (Глава 1) обоснована актуальность темы и сделан краткий обзор по проблемам, затронутым в диссертации. Изложены практическая ценность и краткое описание работы.

Во второй главе рассмотрена модель Гейзенберга с двух- и трех-частичными взаимодействиями на рекурсивной лестнице в сильном магнитном поле. В качестве рекурсивной решетки выбрана зигзагообразная лестница (см. Рис.1). Из опытов известно, что в сильном магнитном поле спин частицы направлен по направлению поля и принимает значения ± 1 , т.е. в сильном магнитном поле антиферромагнитную модель Гейзенберга можно аппроксимировать моделью Изинга, для которой гамильтониан с двух- и трех-частичными взаимодействиями принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = \frac{J_2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (1 + s_i s_j) - \frac{J_3}{2} \sum_{\langle i,j,k \rangle} (1 + s_i s_j + s_j s_k + s_k s_i) - h \sum_i s_i, \quad (2)$$

где $h = \frac{\gamma}{2} \hbar B$, s_i принимает значение ± 1 , J_2 и J_3 константы взаимодействия. Выведены рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы. Показано, что в антиферромагнитном случае при низких температурах на кривой намагниченности в точках $m = 0$ и $m = 1/3$ наблюдаются плато намагниченности (см. Рис.2). Вычислен ляпуновский показатель для трехмерного отображения при низких температурах. Показано, что для некоторых значений параметров двойного и тройного взаимодействия в антиферромагнитном случае максимальный ляпуновский показатель приближается к нулю.

Результаты этой главы опубликованы в работах [1, 3].

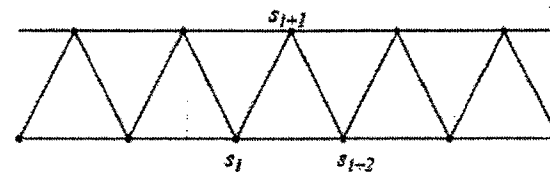


Рис. 1: Зигзагообразная лестница.

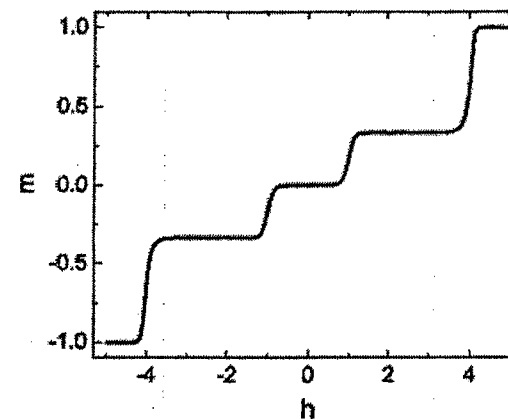


Рис. 2:

Плато намагниченности от внешнего магнитного поля при $J_2 = 2$ мК, $J_3 = 0$ мК, $T = 0.08$ мК.

В третьей главе применяя метод трансфер-матриц рассмотрена модель Изинга с двух- и трех-частичными взаимодействиями с гамильтонианом (2) на зигзагообразной лестнице. В качестве трансфер-матрицы выбрана следующая матрица

$$T_{(s_i, s_{i+1})}^{(s_{i+2}, s_{i+3})} = \begin{vmatrix} a^3 b^2 c^2 & a^5 b c & a^3 c & a^2 \\ a^3 c & a^4 & a^2 & a^5 b c^{-1} \\ a^5 b c & a^2 & a^4 & a^3 c^{-1} \\ a^2 & a^3 c^{-1} & a^5 b c^{-1} & a^8 b^2 c^{-2} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $a = \exp\{-\frac{J_2}{2T}\}$, $b = \exp\{\frac{2J_3}{T}\}$, $c = \exp\{\frac{h}{T}\}$ и T температура. Построе-

ны графики зависимости намагниченности от внешнего магнитного поля при разных константах обменного взаимодействия и температурах. При низких температурах наблюдаются плато намагниченности в точках $m = 0$ и $m = 1/3$. Полученные результаты совпадают с результатами полученными с помощью рекурсивного метода. Мы исследовали физические свойства магнитной восприимчивости. Было показано, что у магнитной восприимчивости во внешнем магнитном поле есть четыре пика при низкой температуре. При фиксированных значениях констант взаимодействия J_2 и J_3 , ширина и высота пиков зависят от температуры. Маленькие группы также показывают характерные особенности больших термодинамических систем. Температурная зависимость магнитной восприимчивости также была исследована.

Результаты этой главы опубликованы в работе [2].

В четвертой главе показано, что анизотропную модель Изинга со спином $1/2$ с многочастичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице можно свести к одномерной анизотропной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями (ANNNI). Гамильтониан модели имеет следующий вид:

$$-\beta\mathcal{H} = K_1 \sum_i s_i s_{i+1} + K_2 \sum_i s_i s_{i+2} + h \sum_i s_i, \quad (4)$$

где K_1 и K_2 константы взаимодействия между ближайшими соседями и следующими за ближайшими соседями соответственно, h внешнее магнитное поле. С помощью метода трансфер-матрицы найдено аналитическое уравнения для распределения нулей статистической суммы. Были исследованы комплексные нули статистической суммы (нули Янга-Ли в комплексной магнитной плоскости и нули Фишера в комплексной температурной плоскости). Распределение нулей статистической суммы в комплексной магнитной плоскости показано на Рис. 3.

Изучена плотность распределения нулей, точки граничной сингулярности и соответствующие им индексы. Было, также найдено, что индексы граничной сингулярности для нулей Янга-Ли и Фишера совпадают и равны $-1/2$. Показано, что введение трехчастичного взаимодействия в модели ANNNI приводит к более простому распределению нулей функции разделения, т.е. приводит к локализации нулей Янга-Ли в дугах кругов, которые не пересекают положительную реальную ось.

Результаты этой главы опубликованы в работе [4].

В пятой главе с помощью рекуррентных соотношения изучаются бифуркационная структура, период удвоение и хаотическое поведение для антиферромагнитной модели Поттса на решетке Бете и для модели

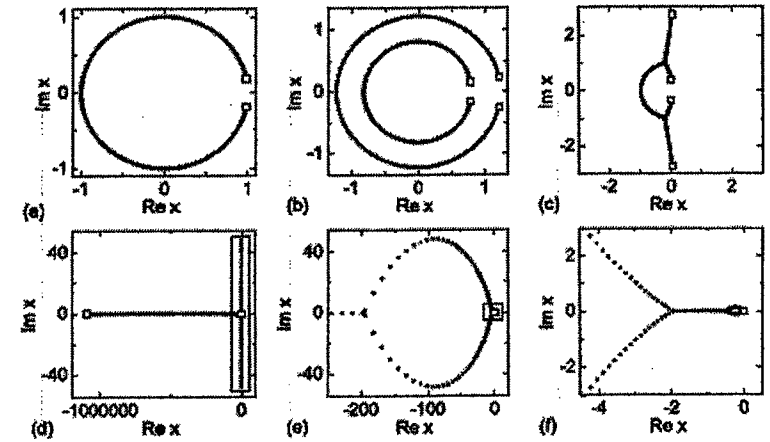


Рис. 3:

Нули Янга-Ли для ANNNI модели для различных значениях параметров K_1 и K_2 . (a) $K_1 = 0.2, K_2 = 0.6$, (b) $K_1 = -0.05, K_2 = 1.3$, (c) $K_1 = 0.8, K_2 = -0.4$, (d), (e) and (f) $K_1 = -1.6, K_2 = -1.4$.

Изинга с мультиспиновым взаимодействием на решетке Хусими в сильном внешнем магнитном поле. Для модели Поттса гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - h \sum_i \delta(\sigma_i, 1), \quad (5)$$

где $J < 0$, σ_i принимает значения $1, 2, \dots, Q$ и $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$ символ Кронекера. Первое суммирование идет по всем ближайшим парам, а вторая сумма по всем узлам. Построены кривые намагниченности для ($Q < 2$) и ($Q \geq 2$). При низких температурах для ($Q \geq 2$) наблюдается только период удвоение см. Рис. 4. А для ($Q < 2$) намагниченность имеет хаотическое поведение.

Также рассмотрено хаотическое поведение модели Изинга с мультиспиновым взаимодействием на решетке Хусими, гамильтониан которого имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = -J_3 \sum_{\Delta} \sigma_i \sigma_j \sigma_k - h \sum_i \sigma_i. \quad (6)$$

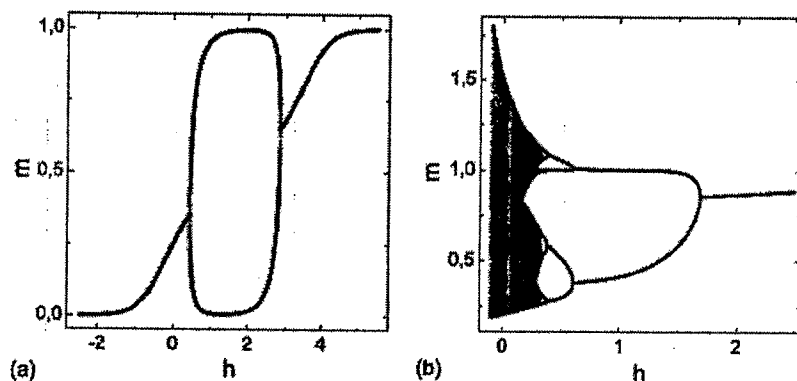


Рис. 4: Графики кривой намагниченности для модели Поттса на решетке Бете при $J = -1$, $\gamma = 3$ а) $Q = 4$, $T = 0.3$ б) $Q = 1.2$, $T = 1$.

Первое суммирование идет по всем треугольникам, а вторая сумма по всем вершинам. Для вышеупомянутых моделей вычислены языки Арнольда и ляпуновский показатель. Показано, что в бифуркационных точках ляпуновский показатель равен нулю, а в хаотическом регионе, он принимает положительные значения.

Мы изучили магнитные свойства модели Изинга с двух- и трехчастичными взаимодействиями на рекурсивной шестиугольной решетке, как приближения треугольной решетки. Используя динамический метод, получены точные трехмерные рациональные рекуррентные соотношения для статистической суммы. Построены графики зависимости намагниченности от внешнего магнитного поля, при низких температурах на кривой намагниченности наблюдаются плато в $m = 0$ и фазовый переход второго рода.

В заключении представлены основные результаты работы:

1. Используя рекуррентные отображения для статистической суммы, исследована зависимость намагниченности от внешнего магнитного поля для модели Изинга на зигзагообразной лестнице. Построены кривые намагниченности, которые имеют плато в точках $m = 0$ и $m = 1/3$ при определенных значениях параметров. Показано, что для некоторых значений параметров двойного и тройного взаимодействия в антиферромагнитном случае максимальный

ляпуновский показатель приближается к нулю, что свидетельствует о том, что не существует фазового перехода [1, 3].

2. Трансфер-матричным методом исследованы магнитные свойства модели Изинга на зигзаг решетке. А также построены графики зависимости магнитной восприимчивости от внешнего магнитного поля и от температуры [2].
3. Используя трансфер-матричный метод, исследованы все типы нулей (нули Янга-Ли и Фишера) статистической суммы для одномерной анизотропной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями (ANNNI) со спином $1/2$ [4].
4. Используя метод динамических систем с многочастичным обменным взаимодействием для модели Поттса на рекурсивной Бете решетке, модели Изинга на решетке Хусими и модели Изинга на шестиугольной решетке получена зависимость намагниченности от внешнего магнитного поля. Изучены языки Арнольда и ляпуновский показатель [3].

Литература

- [1] C. S. O. Yokoi, M. J de Oliveira and S. R. Salinas, *Strange Attractor in the Ising Model with Competing Interactions on the Cayley Tree*, Phys. Rev. Lett. **54**, 163 (1985).
- [2] M. H. R. Trügtenberg and C. S. O. Yokoi, *Field behavior of an Ising model with competing interactions on the Bethe lattice*, Phys. Rev. E **52**, 2187 (1995).
- [3] E. Dagotto and T. M. Rice, *Surprises on the Way from One- to Two-Dimensional Quantum Magnets: The Ladder Materials*, Science **271**, 618 (1996).
- [4] F. Mila, *Ladders in a magnetic field: a strong coupling approach*, Eur. Phys. J. B **6**, 201 (1998).
- [5] K. Ishida, M. Morishita, K. Yawata, and H. Fukuyama, *Low Temperature Heat-Capacity Anomalies in Two-Dimensional Solid ^3He* , Phys. Rev. Lett. **79**, 3451 (1997).
- [6] J. M. Delrieu, M. Roger, and J. H. Hetherington, *Exchange and magnetic order in HCP ^3He and adsorbed ^3He with triangular lattice*, J. Low Temp. Phys. **40**, 71 (1980).
- [7] M. Roger, C. Bauerle, Yu. M. Bunkov, A.-S. Chen, and H. Godfrin, *Multiple-Spin Exchange on a Triangular Lattice: A Quantitative Interpretation of Thermodynamic Properties of Two-Dimensional Solid ^3He* , Phys. Rev. Lett. **80**, 1308 (1998).
- [8] H. J. Schulz, *Phase diagrams and correlation exponents for quantum spin chains of arbitrary spin quantum number*, Phys. Rev. B **34**, 6372 (1986).
- [9] I. Affleck, *Spin gap and symmetry breaking in CuO_2 layers and other antiferromagnets*, Phys. Rev. B **37**, 5186 (1988).
- [10] M. Roger, J. H. Hetherington and J. M. Delrieu, *Magnetism in solid ^3He* , Rev. Mod. Phys. **55**, 1 (1983).
- [11] H. Godfrin and D. D. Osheroff, *Multiple-spin-exchange calculation of the $T=0$ properties of solid ^3He* , Phys. Rev. B **38**, 4492 (1988).
- [12] T. Momoi, H. Sakamoto, and K. Kubo, *Magnetization plateau in a two-dimensional multiple-spin exchange model*, Phys. Rev. B **59**, 9491 (1999).
- [13] E. Ising, *Beitrag zur theorie des ferromagnetismus*, Z. Physik **31**, 253 (1925).
- [14] R. B. Potts, *Some Generalized Order-Disorder Transformations*, Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, pp. 106-109 (1952).
- [15] C. N. Yang, T. D. Lee, *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation*, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
- [16] T. D. Lee, C. N. Yang, *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model*, Phys. Rev. **87**, 410 (1952).
- [17] I. Bena, M. Droz and A. Lipowski, *Statistical Mechanics of Equilibrium and Nonequilibrium Phase Transitions: The Yang-Lee Formalism*, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 4269 (2005).
- [18] M. E. Fisher, *Lectures in Theoretical Physics*, editor W. E. Brittin (Boulder, CO: University of Colorado Press) vol. 7C, p. 1, (1965).
- [19] S. Katsura and M. Ohminami, *Distribution of zeros of the partition function for the one dimensional Ising models*, J. Phys. A: Gen. Phys. **5**, 95 (1972).
- [20] S.-Y. Kim and R. J. Creswick, *Exact results for the zeros of the partition function of the Potts model on finite lattices*, Physica A **281**, 252 (2000).
- [21] X.-Z. Wang and J. S. Kim, *Yang-Lee edge singularity of a one-dimensional Ising ferromagnet with arbitrary spin*, Phys. Rev. E **58**, 4174 (1998).

- [1] V. V. Hovhannisyanyan, L. N. Ananikyan, N. S. Ananikian, *Magnetization plateaus on the zigzag ladder with two-, and three-site exchanges*, Int. J. Mod. Phys. B **21**, pp. 3567-3579 (2007).
- [2] V. V. Hovhannisyanyan and N. S. Ananikian, *Antiferromagnetic model and magnetization plateaus on the zigzag ladder with two- and three-site exchanges*, Phys. Lett. A **372**, pp. 3363-3369 (2008).
- [3] V. V. Hovhannisyanyan, *Многомерные отображения в антиферромагнитных моделях и ляпуновский показатель, связанный с плато намагниченности*, Известия НАН Армении, Физика, 43, 6, pp. 461-467 (2007).
- [4] V. V. Hovhannisyanyan, R. G. Ghulghazaryan, and N. S. Ananikian, *The partition function zeros of the anisotropic Ising model with multisite interactions on a zigzag ladder*, Physics A **388**, pp. 1479-1490 (2009).

Արենախոսությունում ուսումնասիրված են բազմամասնիկային փոխազդեցություններով Իզինգի և Փոթսի մոդելների կրիտիկական վարքը և մագնիսական հարկությունները ռեկուրենտ ցանցերի վրա: Աշխատանքում սրացված հիմնական արդյունքներն են.

1. Զիզագաձև ցանցի վրա երկակի և եռակի փոխազդեցություններով Իզինգի մոդելի վիճակագրական գումարի համար սրացված են եռաչափ ռեկուրենտ արտապարկերումները: Նակաֆերոմագնիսական դեպքում դիվարում են մագնիսական հարթակներ ցածր ջերմաստիճաններում: Նաշվարկված են Լյապունովի ցուցիչները եռաչափ արտապարկերումների համար: Ցույց է տրված, որ հակաֆերոմագնիսական դեպքում երկակի և եռակի փոխազդեցությունների որոշակի արժեքների համար Լյապունովի մաքսիմալ ցուցիչը մոտենում է զրոյի:

2. Տրանսֆեր-մապրիցական մեթոդով հետազոտված են երկակի և եռակի փոխազդեցություններով Իզինգի մոդելի մագնիսական հարկությունները: Ցույց է տրված, որ արդյունքները համընկնում են դինամիկ համակարգերի մեթոդով սրացված արդյունքների հետ: Մոդելի համար կառուցվել են արտաքին մագնիսական դաշտից և ջերմաստիճանից մագնիսական ընկալունակության կախվածության գրաֆիկները:

3. Տրանսֆեր-մապրիցական մեթոդով հետազոտված են ամենամոտ- և հաջորդ-ամենամոտ-հարևան Իզինգի մոդելի Ցանգ-Լիի և Ֆիշերի գրոները: Վիճակագրական գումարի գրոների համար հաշվարկված են նաև սահմանային փարամիտության ինդեքսները, որոնք ունեն ունիվերսալ բնույթ:

4. Դինամիկ համակարգերի մեթոդով հակաֆերոմագնիսական Փոթս մոդելի համար Բեյրե ցանցի վրա և Իզինգի մոդելի համար Նուսիմի ցանցի վրա ուսումնասիրված է մագնիսացման կախվածությունն արտաքին մագնիսական դաշտից: Կառուցված են նաև Առնոլդի լեզուների և Լյապունովի ցուցիչ գրաֆիկները: Ցույց է տրված, որ քառասային ռեժիմում Լյապունովի ցուցիչը ընդունում է դրական արժեքներ իսկ երկակիության կետերում հավասարվում է զրոյի: Ներազոտված են բազմամասնիկային փոխազդեցություններով Իզինգի մոդելի մագնիսական հարկությունները ռեկուրենտ վեցանկյուն ցանցի վրա: Ցույց է տրված, որ ջերմաստիճանի և փոխազդեցության հասարարումների որոշակի արժեքների համար տեղի ունի փուլային անցում:

